GCMATEMATICA

TEOREMAS Y ESTRATEGIAS PARA RESOLVER DERIVADAS DE FUNCIONES

DEFINICIÓN DE LA RECTA TANGENTE CON PENDIENTE "m"

Si $\boldsymbol{f}$ está definida en un intervalo abierto que contiene a $\boldsymbol{c}$ y además existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

Entonces la recta que pasa por $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}))$ y cuenta con una pendiente $\boldsymbol{m}$ es la **recta tangente** a la gráfica de $\boldsymbol{f}$ en el punto $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}))$.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La **derivada** de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}$ está dada por

$$\boldsymbol{f'(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{f(x+\Delta x) - f(x)}}{\boldsymbol{\Delta x}}$$

Siempre que exista ese límite. Para todos los $\boldsymbol{x}$ para los que exista este límite, $\boldsymbol{f'}$ es una función de $\boldsymbol{x}$.

TEOREMA 2.1 DERIVABLE IMPLICA CONTINUA

Si $\boldsymbol{f}$ es derivable en $\boldsymbol{x = c}$, entonces $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{x = c}$.

TEOREMA 2.2 LA REGLA DE LA CONSTANTE

La derivada de una función constante es $\boldsymbol{0}$. Es decir, si $\boldsymbol{c}$ es un número real, entonces

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}[\boldsymbol{c}] = \boldsymbol{0}$$

TEOREMA 2.3 LA REGLA DE LA POTENCIA

Si $\boldsymbol{n}$ es un número racional, entonces la función $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ es derivable y

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}[\boldsymbol{x^n}] = \boldsymbol{nx^{n-1}}$$

Para que $\boldsymbol{f}$ sea derivable en $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{n}$ debe ser un número real tal que $\boldsymbol{x^{n-1}}$ se encuentre definido en un intervalo que contenga al 0.

TEOREMA 2.4 LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE

Si $\boldsymbol{f}$ es una función derivable y $\boldsymbol{c}$ un número real, entonces $\boldsymbol{cf}$ también es derivable y

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

TEOREMA 2.5 LAS REGLAS DE SUMA Y DIFERENCIA

La derivada de la suma (o de la diferencia) de dos funciones derivables $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ es derivable en sí. Además la derivada de $\boldsymbol{f \pm g}$ es igual a la suma (o diferencia) de las derivadas de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$.

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$$ Regla de la suma.

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = f'(x)-g'(x)$$ Regla de la diferencia

TEOREMA 2.6 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

$$\frac{d}{dx}[sen(x)] = \cos(x) \qquad \frac{d}{dx}[\cos(x)] = -sen(x)$$

TEOREMA 2.7 LA REGLA DEL PRODUCTO

El producto de dos funciones derivables $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ también es derivable. Además, su derivada es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la derivada de la primera por la segunda.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

TEOREMA 2.8 LA REGLA DEL COCIENTE

El cociente $\boldsymbol{f/g}$ de dos funciones derivables $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ también es derivable para todos los valores de $\boldsymbol{x}$ para los que $\boldsymbol{g(x) \neq 0}$. Además, la derivada de $\boldsymbol{f/g}$ se obtiene mediante el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad g(x) \neq 0$$

TEOREMA 2.9 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$\frac{d}{dx}[\tan(x)] = sec^2(x)$ $\frac{d}{dx}[\cot(x)] = -csc^2(x)$

$\frac{d}{dx}[\sec(x)] = \sec(x)\tan(x)$ $\frac{d}{dx}[\csc(x)] = -\csc(\mathrm{x})\cot(x)$

TEOREMA 2.10 LA REGLA DE LA CADENA

Si $y = f(a)$ es una función derivable de u y además $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable de x de manera que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

O su equivalente

$$\frac{d}{dx}\left[f\big(g(x)\big)\right] = f'\big(g(x)\big)g'(x).$$

TEOREMA 2.11 LA REGLA GENERAL DE LA POTENCIA

Si $y = [u(x)]^n$, donde u es una función derivable de x y n es un número racional, entonces

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

O su equivalente

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1} \cdot u'$$

ESTRATEGIAS PARA LA DERIVACIÓN IMPLÍCITA

1. Derivar ambos lados de la ecuación *respecto de x.*
2. Agrupar todos los términos en que aparezca *dy/dx* en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.
3. Factorizar *dy/dx* del lado izquierdo de la ecuación.
4. Despejar *dy/dx.*

ESTRATEGIA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS
1. Identificar todas las cantidades *dadas y por determinar.* Hacer un bosquejo y clasificarlas. 2. Escribir una ecuación que incluya las variables cuyas razones de cambio se encuentran en la información dada o deben calcularse. 3. Utilizando la regla de la cadena, derivar de manera implícita ambos lados de la ecuación con *respecto al tiempo t.* 4. *Después* de terminar el paso 3, sustituir en la ecuación resultante todos los valores conocidos de las variables y sus razones de cambio. Luego se despeja la razón de cambio requerida.

ENUNCIADO VERBAL	MODELO MATEMÁTICO
La velocidad de un automóvil tras una hora de viaje es de 50 millas por hora.	$x =$ distancia recorrida $\frac{dx}{dt} = 50$ cuando $t = 1$
Se introduce agua en una piscina a razón de 10 metros cúbicos por hora.	$v =$volumen de agua en la piscina $\frac{dv}{dt} = 10m^3/h$
Una rueda gira a 25 revoluciones por minuto (1 revolución = 2π radianes).	$\theta =$ángulo de giro $\frac{d\theta}{dt}25(2\pi)rad/min$