



DEFINICIÓN DE LÍMITE

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (salvo posiblemente en c) y L un número real. La afirmación :

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

Significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - c| < \delta, \text{ Entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

TEOREMA 1.1 ALGUNOS LÍMITES BÁSICOS

Si b y c son números reales y n un entero positivo:

$$1. \lim_{x \rightarrow c} b = b \quad 2. \lim_{x \rightarrow c} x = c \quad 3. \lim_{x \rightarrow c} x^n = c^n$$

TEOREMA 1.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Si b y c son números reales y n un entero positivo, f y g son funciones con los límites siguientes:

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = K$
1. Múltiplo escalar	$\lim_{x \rightarrow c} [bf(x)] = bL$
2. Suma o diferencia:	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
3. Producto:	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = LK$
4. Cociente:	$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$ siempre que $K \neq 0$
5. Potencias:	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = L^n$

TEOREMA 1.3 LÍMITES DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

Si p es una función polinomial y c un número real, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$$

Si r es una función racional dada por $r(x) = p(x)/q(x)$ y c un número real tal que $q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$$



TEOREMA 1.4 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN RADICAL

Si n es un entero positivo. El siguiente límite es válido para toda c si n es impar, y para toda $c > 0$ si n es par:

$$\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

TEOREMA 1.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L)$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right) = f(L)$$

TEOREMA 1.6 LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea c un número real en el dominio de una función trigonométrica dada.

1. $\lim_{x \rightarrow c} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(c)$

2. $\lim_{x \rightarrow c} \cos(x) = \cos(c)$

3. $\lim_{x \rightarrow c} \tan(x) = \tan(c)$

4. $\lim_{x \rightarrow c} \cot(x) = \cot(c)$

5. $\lim_{x \rightarrow c} \sec(x) = \sec(c)$

6. $\lim_{x \rightarrow c} \csc(x) = \csc(c)$

TEOREMA 1.7 FUNCIONES QUE COINCIDEN EN TODO, SALVO EN UN PUNTO

Sea c un número real y $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene a c . Si existe el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a c , entonces también existe el límite de $f(x)$ y

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

ESTRATEGIA PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES

1. Aprender a reconocer cuales límites pueden evaluarse por medio de la sustitución directa (Teorema 1.1 y 1.6)
2. Si el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c *no se puede evaluar* por sustitución directa, tratar de encontrar una función g que coincida con f para todo x distinto de $x = c$. [Seleccionar una g tal que el límite de $g(x)$ se pueda evaluar por medio de la sustitución directa.]
3. Aplicar el Teorema 1.7 para concluir *de manera analítica que*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c).$$

4. Utilizar una gráfica o tabla para respaldar la conclusión.

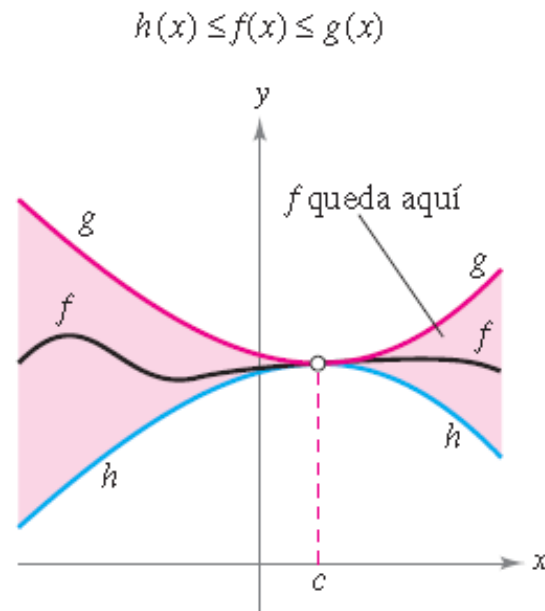


TEOREMA 1.8 TEOREMA DEL ENCAJE

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todos los x en un intervalo abierto que contiene a c , por la posible excepción de la propia c , y si

$$\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

Entonces el $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe y es igual a L



TEOREMA 1.9 LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS ESPECIALES

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Continuidad en un punto: Una función f es **continua en c** si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. $f(c)$ está definida.
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Continuidad en un intervalo abierto: Una función es **continua en un intervalo abierto (a, b)** si es continua en cada punto del intervalo. Una función continua en la recta completa de los números reales $(-\infty, \infty)$ es **continua en todas partes**.



TEOREMA 1.10 EXISTENCIA DE UN LÍMITE

Si f es una función y c y L son números reales, el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L si y sólo si

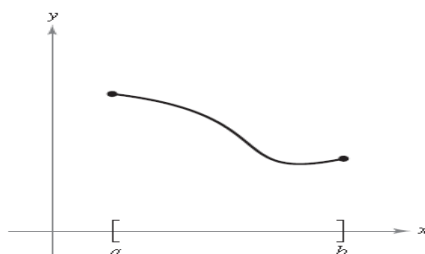
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L.$$

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD EN UN INTERVALO CERRADO

Una función f es **continua en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b) y

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

La función f es **continua por la derecha** en a y **continua por la izquierda** en b



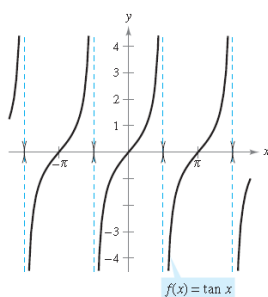
TEOREMA 1.11 PROPIEDAD DE LA CONTINUIDAD

Si b es un número real y f y g son continuas en $x = c$, entonces las siguientes funciones también son continuas en c .

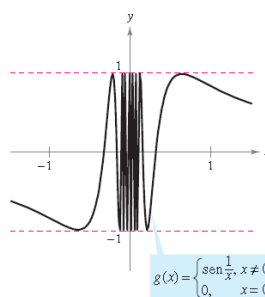
1. Múltiplo escalar: bf
2. Suma y diferencia: $f \pm g$
3. Producto: fg
4. Cociente: $\frac{f}{g}$, si $g(c) \neq 0$

TEOREMA 1.12 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

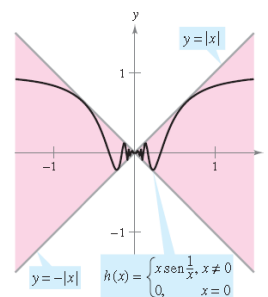
Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, entonces la función compuesta dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en c .



a) f es continua en cada intervalo abierto de su dominio



b) g es continua en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$

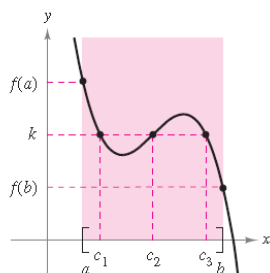


c) h es continua en toda la recta real

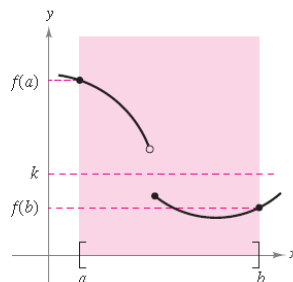


TEOREMA 1.13 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que $f(c) = k$.



f es continua en $[a, b]$
[Existen 3 números c tales que $f(c) = k$]



f no es continua en $[a, b]$
[No existen números c tales que $f(c) = k$]

DEFINICIÓN DE LÍMITES INFINITOS

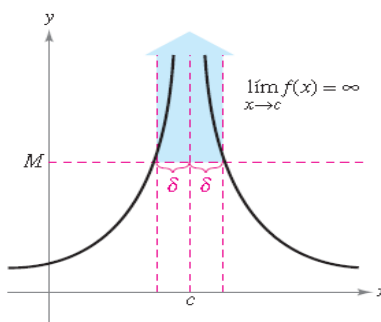
Sea f una función definida en todo número real de un intervalo abierto que contiene a c (salvo, posiblemente, en el propio c). La expresión

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

Significa que para toda $M > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$. Del mismo modo la expresión

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

Significa que para toda $N < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$, siempre que $0 < |x - c| < \delta$.



Límites infinitos

DEFINICIÓN DE ASÍNTOTA VERTICAL

Si $f(x)$ tiende a infinito (o menos infinito) cuando x tiende a c por la derecha o por la izquierda, se dice que la recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de f .

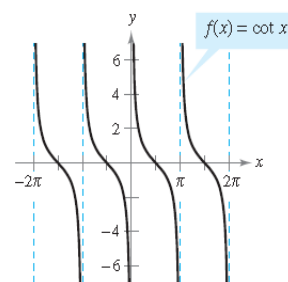
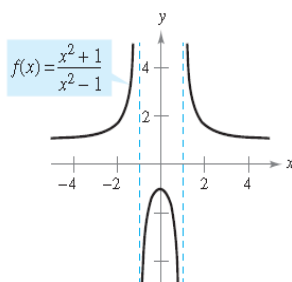
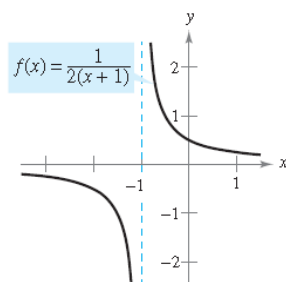


TEOREMA 1.14 ASÍNTOTAS VERTICALES

Sean f y g funciones continuas en un intervalo abierto que contiene a c . Si $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ en el intervalo, entonces la gráfica de la función está dada por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene una asíntota vertical en $x = c$.



TEOREMA 1.15 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS

Sean c y L números reales, y f y g funciones tales que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L.$$

1. Suma o diferencia: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = \infty$
2. Producto: $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = \infty, \quad L > 0$
 $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = -\infty, \quad L < 0$
3. Cociente: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Propiedades análogas son válidas para límites laterales y para funciones cuyo límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es $-\infty$.